UNIVERSIDAD SIMÓN BOLÍVAR
DEPARTAMENTO DE FÍSICA

FS2211 • Primer Parcial • **30** %
Viernes, 3 de Octubre de 2014

Nombre ________________________ Carnet ____________

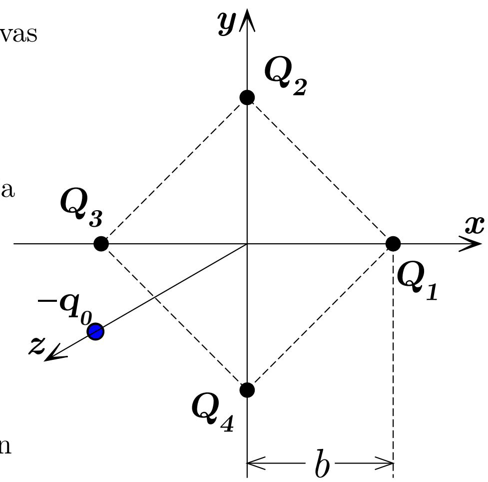
1. [**8** ***pts.***] Cuatro cargas puntuales idénticas, $\boldsymbol{Q_1 = Q_2 = Q_3 = Q_4 = +Q}$, están localizadas en el plano $\boldsymbol{x}$–$\boldsymbol{y}$, en los vértices del cuadrado de diagonal $\boldsymbol{2b}$ que se muestra en la figura, es decir, en las posiciones respectivas:

$$\vec{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{1}} = \boldsymbol{b}\,\widehat{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{x}}, \quad \vec{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{2}} = \boldsymbol{b}\,\widehat{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{y}}, \quad \vec{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{3}} = -\boldsymbol{b}\,\widehat{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{x}} \quad \text{y} \quad \vec{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{4}} = -\boldsymbol{b}\,\widehat{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{y}}\,.$$

Una carga negativa puntual $\boldsymbol{-q_0}$, de masa $\boldsymbol{m_0}$, se coloca en la posición $\boldsymbol{z}\,\widehat{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{z}}$ (sobre el eje z).

(a) [**4** ***pts.***] Determine la fuerza neta $\vec{\boldsymbol{F}}$ que ejercen las cargas positivas sobre la carga negativa de prueba.

(b) [**4** ***pts.***] Si la carga negativa de prueba estuviese muy cercana al origen de coordenadas ($z \ll b$), demuestre que dicha carga estaría sometida a una fuerza de restitución elástica $\boldsymbol{F_z = -Kz}$. Determine la frecuencia $\boldsymbol{\omega}$ de las oscilaciones.



Respuestas:

(a) Usamos la expresión de la fuerza neta ejercida por la distribución $\{Q_i\}$ de cargas puntuales, debida a la Ley de Coulomb:

$$\vec{\boldsymbol{F}} = \frac{-q_0}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^{4} Q_i \frac{(\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{i}})}{\| \vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{i}} \|^3}, \tag{1}$$

donde $Q_i = Q$ y $\| \vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{i}} \|^3 = \left(z^2 + b^2\right)^{3/2}, \forall i$. Además, por estar las cargas en los vértices de un polígono cerrado, $\sum \vec{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{i}} = 0$. Luego:

$$\boxed{\vec{\boldsymbol{F}} = \frac{-Qq_0}{4\pi\epsilon_0} \frac{(4\vec{\boldsymbol{r}})}{\left(z^2 + b^2\right)^{3/2}} = \frac{-Qq_0}{\pi\epsilon_0} \frac{z}{\left(z^2 + b^2\right)^{3/2}}\,\widehat{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{z}}.} \tag{2}$$

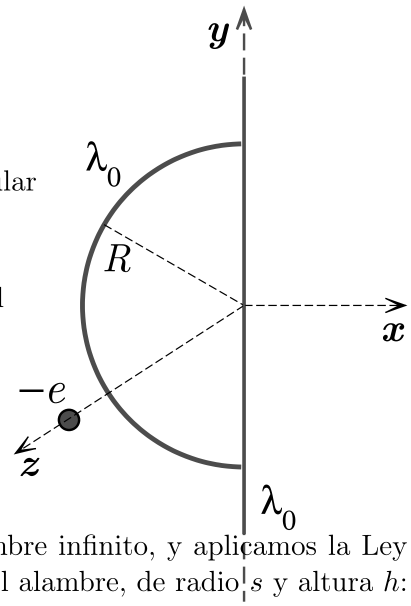
(b) Haciendo $z \ll b$ en la expresión (2), se tiene $\left(z^2 + b^2\right)^{3/2} \approx b^3$, y la fuerza queda:

$$F_z = \frac{-Qq_0}{\pi\, b^3 \epsilon_0}\, z = -Kz, \tag{3}$$

donde la constante de restitución elástica es $K = (Qq_0)/(\pi\, b^3 \epsilon_0)$. Siendo m_0 la masa de la carga de prueba, la ecuación de movimiento queda

$$\ddot{z} = -\omega^2 z, \text{ donde } \omega^2 = K/m_0 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\omega = \sqrt{\left(\frac{q_0}{m_0}\right) \frac{Q}{\pi\, b^3 \epsilon_0}}\,.}$$

2. [**10** ***pts.***] La figura muestra un alambre recto muy largo sobre el eje $\boldsymbol{y}$, y un arco semicircular de radio $\boldsymbol{R}$ localizado en el plano $\boldsymbol{x}$–$\boldsymbol{y}$, con centro en el origen de coordenadas. Ambos alambres tienen densidad lineal de carga positiva $\boldsymbol{\lambda_0}$.



(a) [**4** ***pts.***] Calcule el campo eléctrico $\vec{\boldsymbol{E}}_{\boldsymbol{1}}$, producido por el alambre recto cargado, en un punto arbitrario sobre el eje $\boldsymbol{z}$.

(b) [**4** ***pts.***] Calcule el campo eléctrico $\vec{\boldsymbol{E}}_{\boldsymbol{2}}$, producido por el arco semicircular cargado, en un punto arbitrario sobre el eje $\boldsymbol{z}$.

(c) [**2** ***pts.***] Se coloca un electrón, de carga $-\boldsymbol{e}$, en el punto $\boldsymbol{R}\,\widehat{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{z}}$ (sobre el eje $\boldsymbol{z}$). Determine la fuerza neta $\vec{\boldsymbol{F}}$ que ejercen las cargas del alambre recto y del arco semicircular sobre el electrón.

Respuestas:

(a) Siendo el alambre recto muy largo, usamos la aproximación a un alambre infinito, y aplicamos la Ley de Gauss tomando como superficie Gaussiana un cilindro coaxial con el alambre, de radio s y altura h:

$$\left.\begin{cases} \vec{\boldsymbol{E}} = E_s\,\widehat{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{s}} \quad \text{(simetría cilíndrica)} \\ \Phi_E = 2\pi s \cancel{h} E_s = \lambda_0 \cancel{h} \end{cases}\right\} \Rightarrow E_s = \frac{\lambda_0}{2\pi\epsilon_0\, s} \Rightarrow \boxed{\vec{\boldsymbol{E}}_{\boldsymbol{1}} = \frac{\lambda_0}{2\pi\epsilon_0\, z}\,\widehat{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{z}}}$$

para cualquier punto arbitrario sobre el eje z.

(b) En este caso, adaptamos la expresión de la Ley de Coulomb a un distribución continua de cargas:

$$\vec{\boldsymbol{E}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int dQ\,\frac{(\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}\boldsymbol{'})}{\|\,\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}\boldsymbol{'}\,\|^3}\,, \tag{4}$$

donde $dQ = \lambda_0 d\ell = \lambda_0 R d\varphi$, con $\pi/2 < \varphi < 3\pi/2$. La posición relativa es $\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}\boldsymbol{'} = z\,\widehat{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{z}} - R\,\widehat{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{s}}(\varphi)$, por lo cual $\|\,\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}\boldsymbol{'}\,\|^3 = \left(z^2 + R^2\right)^{3/2}$ (independiente de la variable de integración φ). Siendo el versor $\widehat{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{z}}$ también independiente de la variable de integración, la componente E_z del campo eléctrico queda:

$$E_z = \frac{\cancel{\pi}\lambda_0}{4\cancel{\pi}\epsilon_0}\,\frac{Rz}{(z^2 + R^2)^{3/2}} \Longrightarrow \boxed{E_z = \frac{\lambda_0}{4\epsilon_0}\,\frac{Rz}{(z^2 + R^2)^{3/2}}\,,} \tag{5}$$

mientras que para encontrar la componente transversal al eje z, $E_\perp$, sólo hace falta integrar el vector unitario $\widehat{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{s}}(\varphi) = \cos\varphi\,\widehat{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{x}} + \operatorname{sen}\varphi\,\widehat{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{y}}$ en el intervalo correspondiente ($\pi/2 < \varphi < 3\pi/2$). El resultado de la integración es $-2\,\widehat{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{x}}$, por lo cual:

$$\boxed{E_x = \frac{\lambda_0}{2\pi\epsilon_0}\,\frac{R^2}{(z^2 + R^2)^{3/2}}} \quad \text{y} \quad \boxed{E_y = 0\,.} \tag{6}$$

Entonces, el campo producido por el aro semicircular cargado es:

$$\boxed{\vec{\boldsymbol{E}}_{\boldsymbol{2}} = \frac{\lambda_0}{4\epsilon_0}\,\frac{R^2}{(z^2 + R^2)^{3/2}}\left[\left(\frac{2}{\pi}\right)\widehat{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{x}} + \left(\frac{z}{R}\right)\widehat{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{z}}\right].} \tag{7}$$

(c) Siendo $\boldsymbol{R}\,\widehat{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{z}}$ la posición del electrón ($z \equiv R$), se tiene $\left(z^2 + R^2\right)^{3/2} = 2R^3\sqrt{2}$, y la fuerza que ejerce la distribución completa de cargas sobre el mismo es:

$$\boxed{\vec{\boldsymbol{F}} = -\frac{\lambda_0 e}{8\sqrt{2}\epsilon_0\,R}\left[\left(\frac{2}{\pi}\right)\widehat{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{x}} + \left(1 + \frac{4\sqrt{2}}{\pi}\right)\widehat{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{z}}\right].} \tag{8}$$

3. **[12 *pts.*]** Una esfera aislante hueca, de radio interno $\boldsymbol{a}$ y radio externo $\boldsymbol{b = 2a}$, porta carga con densidad variable

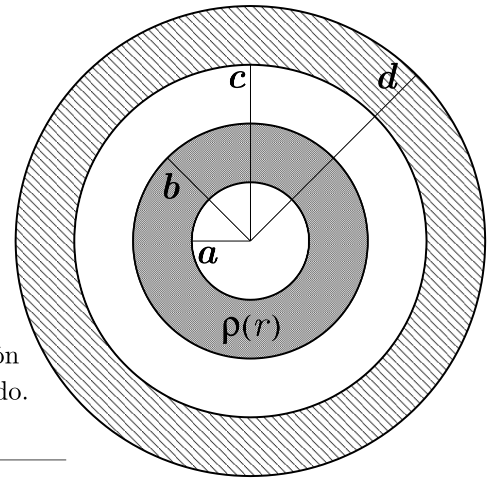
$$\boxed{\boldsymbol{\rho(r) = \rho_0 \left(\frac{a}{r}\right)},}$$

donde $\boldsymbol{\rho_0}$ es una constante positiva y $\boldsymbol{r}$, la distancia al centro de la esfera. La esfera está rodeada por una cámara esférica conductora concéntrica, de radio interno $\boldsymbol{c = 3a}$ y radio externo $\boldsymbol{d = 4a}$, eléctricamente neutra.

(a) **[3 *pts.*]** Calcule la carga neta $\boldsymbol{Q_{tot}}$ de la esfera aislante hueca.

(b) **[6 *pts.*]** Determine el campo eléctrico $\vec{\boldsymbol{E}}$ en todas las regiones del espacio. Grafique la componente radial del campo ($\boldsymbol{E_r}$) en función de $\boldsymbol{r}$.

(c) **[3 *pts.*]** Determine las densidades de carga $\boldsymbol{\sigma_c}$ y $\boldsymbol{\sigma_d}$ inducidas, respectivamente, en las superficies interna ($\boldsymbol{r = c}$) y externa ($\boldsymbol{r = d}$) del conductor.



★ Se le sugiere substituir en sus resultados los valores $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ y $\boldsymbol{d}$, en función del radio interno de la esfera aislante, $\boldsymbol{a}$, como se indica en el enunciado.

Respuestas:

(a) Integramos la densidad de cargas sobre todo el volumen de la esfera hueca:

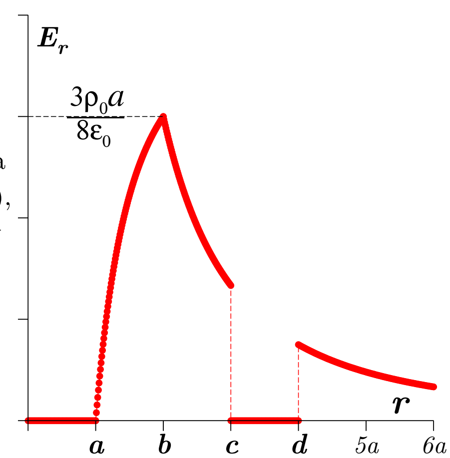
$$Q_{tot} = \int \rho d\mathcal{V} = \int_a^b \rho_0 \left(\frac{a}{r}\right) 4\pi r^2 dr = 2\pi\rho_0 a \left(b^2 - a^2\right) \text{ con } b = 2a \Rightarrow \boxed{Q_{tot} = 6\pi\rho_0 a^3.} \tag{9}$$

(b) Debido a la simetría esférica de la ditribución, el campo es radial $\vec{\boldsymbol{E}} = E_r\,\widehat{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{r}}$, y por lo tanto $\Phi_E = 4\pi r^2 E_r$ para cualquier superficie Gaussiana esférica, de radio r, concéntrica con la esfera. Adentro de la esfera hueca ($r < a$), no hay cargas, y por lo tanto, en esa región $\vec{\boldsymbol{E}} \equiv 0$. Similarmente, el campo es $\vec{\boldsymbol{E}} \equiv 0$ adentro del conductor ($c < r < d$). Por ser el conductor eléctricamente neutro, las superficies Gaussianas externas al conductor ($r > d$) contienen una carga igual a Q_{tot}, al igual que las superficies Gaussianas en el vacío entre el aislante y el conductor ($b < r < c$). Con estos argumentos, sabemos entonces que:

$$\boxed{\vec{\boldsymbol{E}} \equiv \boldsymbol{0}, \forall\, r \in [0, a] \bigcup [c, d]} \quad \text{y}$$

$$\boxed{\vec{\boldsymbol{E}} = \frac{Q_{tot}}{4\pi\epsilon_0}\frac{\widehat{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{r}}}{r^2} = \frac{3\rho_0 a}{2\epsilon_0}\left(\frac{a}{r}\right)^2 \widehat{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{r}}, \forall\, r \in [b, c] \bigcup [d, \infty]\,.}$$

Gráfico de E_r vs. r



Sólo falta calcular la carga encerrada $Q_{in}(r)$ por una superficie Gaussiana en el interior del aislante ($a < r < b$). Con la misma integral usada en **(a)**, cambiando el límite superior b por r, se tiene $Q_{in}(r) = 2\pi\rho_0 a\left(r^2 - a^2\right)$, y el campo queda:

$$\boxed{\vec{\boldsymbol{E}} = \frac{Q_{in}(r)}{4\pi\epsilon_0}\frac{\widehat{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{r}}}{r^2} = \frac{\rho_0 a}{2\epsilon_0}\left[1 - \left(\frac{a}{r}\right)^2\right] \widehat{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{r}}, \forall\, r \in [a, b]\,.}$$

(c) Según la Ley de Gauss, la carga inducida en la superficie interna del conductor ($r = c$) debe ser $Q_c = -Q_{tot}$, de manera que el campo en su interior sea cero. Al ser eléctricamente neutro, esto implica que la carga en la superficie externa del mismo ($r = d$) es $Q_d = +Q_{tot}$.

Dividiendo entre las superficies esféricas correspondientes, se tiene: $\boxed{\sigma_c = -\frac{1}{6}\rho_0 a}$ y $\boxed{\sigma_d = +\frac{3}{32}\rho_0 a\,.}$